



Données 28 - Le graphe

I - Qu'est-ce que le type abstrait GRAPHE SIMPLE ?

1.1 Partie 1 de la définition : l'idée générale

Un **GRAPHE** est un **type abstrait de données** qu'on peut résumer à

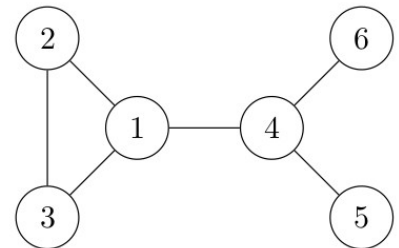
- un ensemble S de _____ pouvant être reliés entre eux
- un ensemble A de _____ qu'on nomme _____.

Un graphe est une **structure de données relationnelle** qui possède les propriétés suivantes :

- Chaque sommet possède une **étiquette**, et éventuellement des données.
- Chaque **sommet** peut posséder ou non des **relations** avec d'autres sommets.

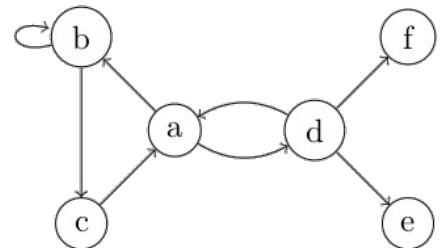
- **GRAPHE NON ORIENTE** : la relation peut s'emprunter dans les deux sens :

- La relation se nomme une **arête**.
- Une arête est définie par un **ensemble** (*non ordonné*) de 2 sommets **{a, b}**
- Cette notation **{a, b}** indique qu'il y a une relation entre **a et b**.
- Cette notation **{}** indique un **ensemble** : a et b doivent être distincts.
- L'arête **{a, b}** peut se noter (a, b) ou (b, a), sans importance pour l'ordre.
- Le **graphe non orienté** $g = (S, A)$ ci-dessus est le **couple composé** :
 - d'un **ensemble** de sommets $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - d'un **ensemble** d'arêtes $A = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{4,6\}, \{4,5\} \}$



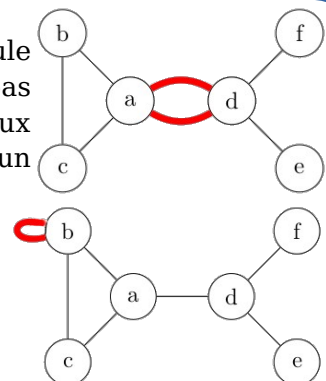
- **GRAPHE ORIENTE** : la relation ne s'emprunte que dans un sens précis :

- La relation se nomme un **arc** (« arc car flèche de direction »).
- Un arc est défini comme une **paire** (*ordonnée*) de sommets **(a, b)**.
- Cette notation indique qu'on peut aller de a vers b.
- L'arc (a,b) est donc différent de l'arc (b,a).
- Le **graphe orienté** $g = (S, A)$ ci-dessous est un couple composé :
 - d'un **ensemble** de sommets $S = \{a, b, c, d, e, f\}$
 - d'un **ensemble** d'arcs $A = \{ (a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (c, a), (d, a), (d, f), (d, e) \}$



GRAPHE SIMPLE : c'est un graphe où il n'existe qu'une seule relation permettant de relier deux sommets (il n'y a pas possibilité de représenter deux portes communes reliant deux salles). Le graphe ci-contre N'EST PAS SIMPLE mais est un multigraphe.

BOUCLE : relation **reliant un sommet à lui-même** : elles existent sur les graphes orientés puisqu'on peut définir l'arc (b,b) par exemple (voir ci-dessus) mais pas sur les graphes non orientés (puisqu'on NE PEUT PAS définir l'ensemble {b, b} !



1.1 Partie 2 de la définition : les primitives

On suppose ici un graphe immuable. Les primitives disponibles sont habituellement :

Noms de la fonction	Description
nouveauGraphe() → graphe	Renvoie la référence d'un nouveau graphe vide g = ({} , {})
estGrapheVide(g:graphe) → bool	Prédicat qui renvoie Vrai si le graphe g est vide, c'est à dire g = ({} , {}) . Ni sommet, ni arête.
estSommetDe(s:sommet, g:graphe) → bool	Prédicat qui renvoie Vrai si le sommet s appartient à l'ensemble S des sommets de g .
estRelationDe(a:sommet, b:sommet, g:graphe) → bool	Prédicat qui renvoie Vrai si la relation entre a et b appartient à l'ensemble A des relations de g .
ajouterSommet(s:sommet, g:graphe) → graphe	On ajoute le sommet s à l'ensemble S du graphe g , sans lui attribuer de relation.
ajouterRelation(a:sommet, b:sommet, g:graphe) → graphe	On ajoute une relation a-b dans l'ensemble A des relations du graphe.
degreEntrant(s:sommet, g:graphe) → int	Renvoie le nombre de relations entrantes vers le sommet s du graphe g .
niemeEntrant(s:sommet, g:graphe, n:int) → sommet	Renvoie le sommet qui correspond à la n-ième relation entrante sur le sommet s .
degreSortants(s:sommet, g:graphe) → int	Renvoie le nombre de relations sortantes du sommet s du graphe g .
niemeSortant(s:sommet, g:graphe, n:int) → sommet	Renvoie le sommet qui correspond à la n-ième relation sortante sur le sommet s .
retirerSommet(s:sommet, g: graphe) → graphe	Renvoie un graphe où le sommet s a été retiré de S et où les relations l'incluant ont disparu de A.
retirerRelation(a:sommet, b:sommet, g:graphe) → graphe	Renvoie un graphe où la relation reliant a-b a disparu de A.

**Le mot « Relation » devra être remplacé par Arc ou Arete.
Pour un graphe non orienté, il n'y a pas de différence entre entrant ou sortant.**

Q 01 : Le graphe **g** ci-contre est-il orienté ou non orienté ?

Q 02 : Fournir les ensembles S et A du graphe **g = (S, A)**.

On considère que A est défini dans cet ordre **A = { {a,b}, {a,c} ... }**

Q 03 : Que renvoie alors **degreEntrant(a, g)** ?

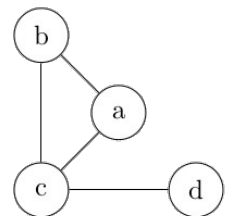
Q 04 : Que renvoie alors **niemeEntrant(a, g, 1)** si on commence la numération à 0 ?

Q 05 : Soit e un sommet. Que devient le graphe si on utilise ceci :

ajouterSommet(e, g)

ajouterArete(a, e, g)

ajouterArete(d, e, g)



II – Degré

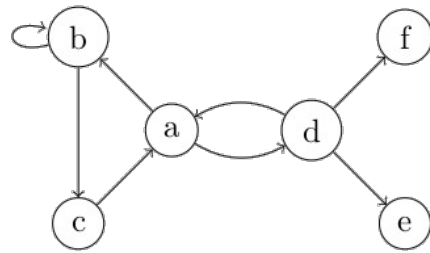
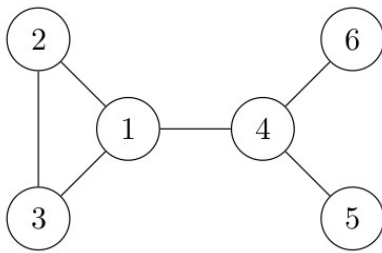
Dans un **graphe non orienté**, le degré d'un sommet correspond au nombre d'arêtes menant ou sortant de ce sommet. De façon rigoureuse, il s'agit donc du nombre d'éléments de l'ensemble A où le sommet s apparaît.

Dans un **graphe orienté**, on distingue le degré entrant d'un sommet (combien d'arcs mènent à ce sommet) et le degré sortant d'un sommet (combien d'arcs sortent de ce sommet).

Le degré sortant correspond rigoureusement au nombre d'éléments de A où le sommet s apparaît en première position.

Le degré entrant correspond rigoureusement au nombre d'éléments de A où le sommet s apparaît en deuxième position.

Q 06 : Fournir les degrés des sommets des deux graphes suivants :



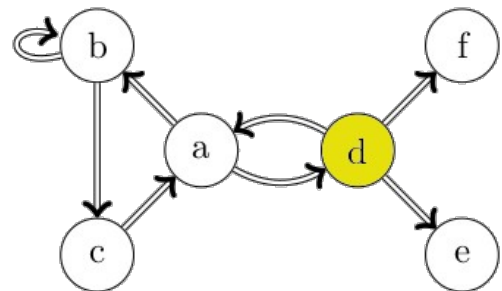
III – Cheminement : chemin (orienté) et chaîne (non orienté)

CHEMIN : un parcours du graphe suivant une suite précise de sommets adjacents et d'arcs adjacents.

- Exemple : **d-(d-a)-a-(a,b)-b-(b,c)-c**.

Dans un graphe simple, on peut donc décrire ce chemin comme

- une suite d'arcs : **(d-a)-(a,b)-(b,c)**
- une suite de sommets : **d-a-b-c**



BOUCLE : circuit constitué d'un seul arc qui part d'un sommet et y revient.

CYCLE

- Chemin comportant **plus d'un arc** et dont le **sommet d'arrivée est le sommet de départ** (on part de A et on revient à A). Si le "cycle" ne comporte qu'un arc, on parlera plutôt de boucle.
 - Exemple : **(d-a)-(a,b)-(b,c)-(c,a)-(a,d)** par exemple.

ACYCLIQUE

- Un graphe orienté qui ne possède pas de cycle simple est dit acyclique.

CHEMIN SIMPLE

- Un **chemin simple** est un cheminement où on emprunte un arc donné une fois au maximum.
- Un **chemin eulérien** est un chemin simple passant une unique fois **par tous les arcs d'un graphe** donné.

CHEMIN ELEMENTAIRE

- Un **chemin élémentaire** est un cheminement où on ne passe qu'une fois par un sommet.
- Un **chemin hamiltonien** est un chemin passant une unique fois **par tous les sommets d'un graphe** donné.

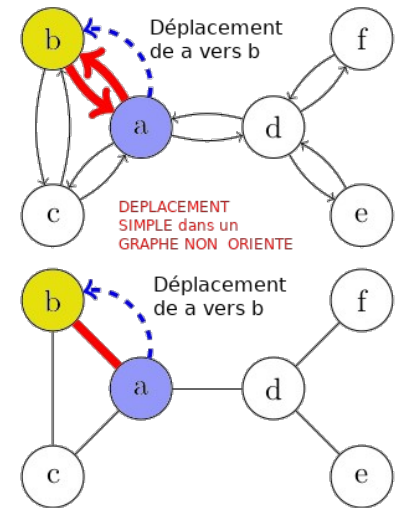
DIFFERENCE ENTRE GRAPHE NON ORIENTE et GRAPHE ORIENTE

On retrouve les mêmes définitions sur les graphes non orientés en remplaçant les termes arcs par arêtes.

On pourrait croire que ces deux graphes sont équivalents, mais non !

Sur le graphe orienté, on peut passer de a vers b lors du parcours puis passer de b vers a puisqu'on active deux arcs différents.

Sur le graphe non orienté, passer de a à b bloque définitivement cette arête et on ne pourra donc plus passer de b à a.



ARCS et ARETES, CHEMIN et CHAINES

Le vocabulaire est différent sur les deux types de graphes :

GRAPHE NON ORIENTE	Arête	Chaîne
GRAPHE ORIENTE	Arc	Chemin

IV – Traduction

En anglais (culture générale bien entendu)

- **Directed Graph** ou **Digraph** pour Graphe Orienté et Arc pour Arc
- **Undirected Graph** pour Graphe Non Orienté et Edge pour Arête
- **Vertex** pour Sommet
- **Edge** pour arête
- **Walk** pour Chemin
- **Trail** pour Chemin Simple
- **Loop** pour Boucle
- **Cycle** pour Cycle