Données 29 – Chemins dans les graphes

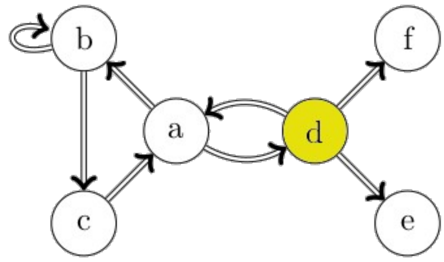
I – Qu'est-ce qu'un chemin dans un graphe ?

Sommet adjacent : un sommet b est adjacent au sommet a s'il existe un arête {a,b} ou un arc (a,b).

Chemin : un parcours du graphe suivant une suite précise de sommets adjacents et d'arcs adjacents

Exemple : d-(d-a)-a-(a,b)-b-(b,c)-c.
Dans un graphe simple, on peut donc décrire ce chemin comme

- une suite d'arcs : (d-a)-(a,b)-(b,c)
- une suite de sommets : d-a-b-c



Boucle : chemin constitué d'un seul arc qui part d'un sommet et y revient.

Cycle : chemin comportant **plus d'un arc ou plus qu'une arête** et dont le sommet d'arrivée est le sommet de départ (on part de A et on revient à A).

Acyclique : un graphe qui ne possède pas de cycle simple est dit acyclique : un cycle simple veut dire qu'on ne passe pas deux fois par la même arête ou le même arc.

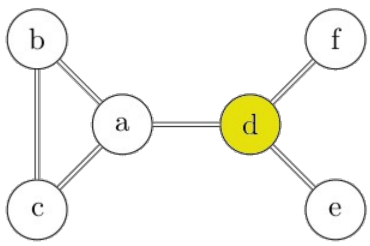
Q 01 : Le graphe ci-dessus est-il acyclique ? S'il est cyclique, fournir un cycle possible.

Graphe connexe : un graphe connexe est un graphe où on peut atteindre n'importe quel sommet du graphe en partant de n'importe quel sommet.

Q 02 : Le graphe ci-dessus est-il connexe ? Montrer cette affirmation par un exemple.

II – Qu'est-ce qu'un chemin simple dans un graphe ? Culture générale

Un **chemin simple** est un chemin qui n'emprunte pas deux fois la même relation (arc ou arête).



Q 03 : Le chemin **a-b-c** est-il un chemin simple ?

Q 04 : Le chemin **a-b-c-a-d** est-il un chemin simple ?

Q 05 : Le chemin **d-a-b-c-a-d** est-il un cycle simple ?

Un **chemin eulérien** est un chemin simple passant par tous les arêtes d'un graphe donné . On notera que dans un chemin eulérien on peut emprunter plusieurs fois un même sommet. Un graphe qui possède un chemin eulérien est nommé **graphe eulérien**.

Q 06 : Le graphe précédent est-il un graphe eulérien ?

Attention : différence fondamentale entre graphe orienté ou graphe non-orienté : on peut croire qu'un graphe non orienté peut être transformé de façon équivalente en graphe orienté en remplaçant chaque arête par deux arc : {a,b} devient (a, b) et (b,a).

Ce n'est pas réellement vrai si on cherche un chemin simple :

→ dans un graphe orienté, si on emprunte l'arc (a,b), l'arc (b,a) est encore disponible.

→ dans un graphe non orienté, si on emprunte l'arc équivalent (a,b), on ferme (b,a).

Q 07 : Représenter le graphe orienté équivalent au graphe ci-dessus.

Q 08 : Si on voit ce nouveau graphe comme un vrai graphe orienté, peut-on y trouver un cycle eulérien ?

Q 09 : Si on voit ce nouveau graphe comme un graphe non orienté représenté par des arcs plutôt que des arêtes, peut-on y trouver un cycle eulérien ?

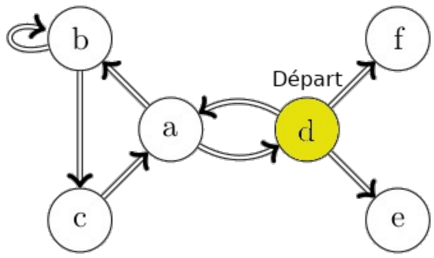
III – Qu'est-ce qu'un chemin élémentaire dans un graphe ? Culture générale

Définition : un cheminement élémentaire est un cheminement qui ne passe qu'une seule fois par un sommet donné.

Q10 : Le chemin a-b-c-a-d est-il un chemin simple ? Est-il un chemin élémentaire ?

Q11 : Est-il plus difficile d'avoir un chemin simple ou un chemin élémentaire ?

Q 12 : Peut-on trouver un cycle élémentaire simple partant de d sur le graphe ci-contre ? Peut-on trouver un chemin élémentaire ?



Un **chemin hamiltionien** est un chemin élémentaire passant par tous les sommets d'un graphe. Un graphe possèdant un chemin hamiltonien est nommé **graphe hamiltonien**.

IV – Autres définitions de culture générale (en NSI)

Ordre : l'ordre d'un graphe correspond à son nombre de sommet. Similaire à la taille d'un arbre.

L'**excentricité** d'un sommet est la distance la plus grande qu'on peut trouver à partir de ce sommet. La distance correspond au nombre de relations empruntées.

On nomme **diamètre** D d'un graphe l'excentricité maximale trouvée parmi les sommets.

On nomme **rayon** R d'un graphe l'excentricité minimale trouvée parmi les sommets.

On nomme **centre** d'un graphe un sommet dont l'excentricité correspond au rayon.

Q 13 : Appliquer toutes les définitions ci-dessus au graphe situé en bas de la page 1. Faire de même avec le graphe de la page 2.