Données 21 – Les arbres

I – Les arbres enracinés

II – Les arbres binaires

III – Caractéristiques des arbres

IV - Encadrement de la hauteur d’un arbre binaire

V – Encadrement de la taille n d'un arbre binaire

Intérêt : estimer le nombre n de données stockées dans un arbre en fonction de sa hauteur h.

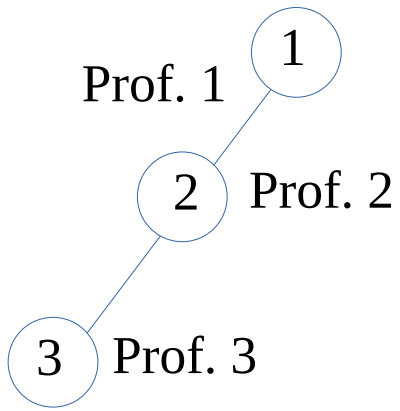
On prendra d'abord la convention : **profondeur de 1** pour la racine ($p_R = 1$).

a) Cas extrême 1 : l'arbre filiforme

Aucune difficulté : $\boxed{\mathbf{n = h}}$ pour le cas filiforme et $p_R = 1$.

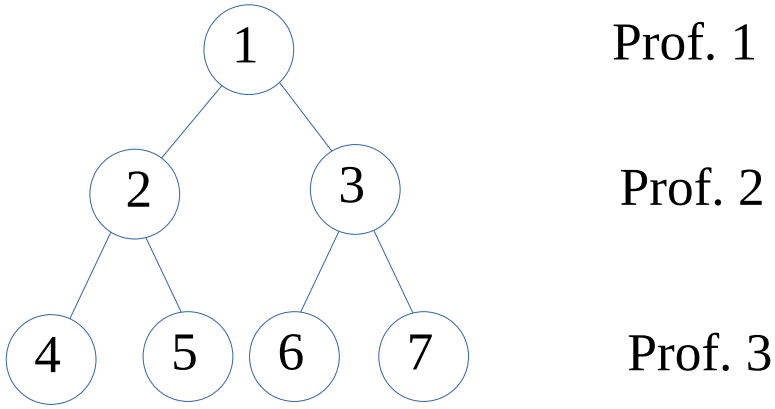
Exemple avec h = 3

On a **n = 3** nœuds 1, 2, 3.
La hauteur de l'arbre est bien **h = 3**.



b) Cas extrême 2 : l'arbre parfait

Exemple avec h = 3



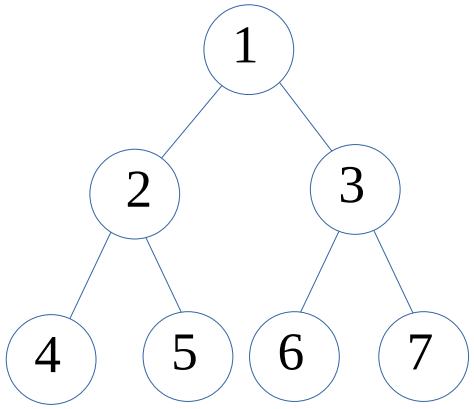
On a n = 7 nœuds de 1 à 7
La hauteur de l'arbre est h = 3.

Sur cet exemple, on voit :

Si h = 1 alors n = 1 nœud. Formule n = ?
Si h = 2 alors n = 3 nœuds. Formule n = ?
Si h = 3 alors n = 7 nœuds. Formule n = ?

b) Cas extrême 2 : l'arbre parfait

Exemple avec h = 3



Prof. 1

Prof. 2

Prof. 3

On a n = 7 nœuds de 1 à 7
La hauteur de l'arbre est h = 3.

Sur cet exemple, on voit :

Si h = 1 alors n = 1 nœud. $n = 2^1 - 1 = 1$

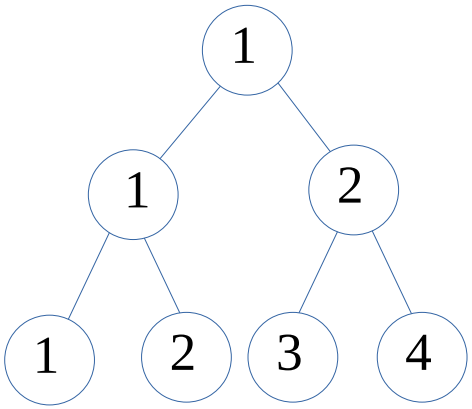
Si h = 2 alors n = 3 nœuds. $n = 2^2 - 1 = 3$

Si h = 3 alors n = 7 nœuds. $n = 2^3 - 1 = 7$

On peut supposer que : $\boxed{n = 2^h - 1}$ pour le cas parfait et $p_R = 1$

(Nous verrons la démonstration plus loin)

Remarque 1 : le nombre de nœuds vaut également $n = 2^0 + 2^1 + 2^2$



Prof. 1 2^0

Prof. 2 2^1

Prof. 3 2^2

Remarque 2 : le nombre de feuilles sur le dernier étage :

$\boxed{n_F = 2^{h-1}}$ pour le cas parfait et $p_R = 1$

Ici, $n_F = 2^{h-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$ feuilles.

c) Bilan si $p_R = 1$

Encadrement de la taille n d'un arbre inconnu :

$$\boxed{h \leq n \leq 2^h - 1} \quad \text{si } p_R = 1$$

Dernier étage d'un arbre parfait :

$$\boxed{n_F = 2^{h-1}} \quad \text{si } p_R = 1$$

Encadrement de la hauteur d'un arbre inconnu :

$$\boxed{\lceil \log_2(n+1) \rceil \leq h \leq n}$$

c) Bilan si $p_R = 0$

Encadrement de la taille n d'un arbre inconnu :

$$\boxed{h+1 \leq n \leq 2^{h+1}} \quad \text{si } p_R = 0$$

Dernier étage d'un arbre parfait :

$$\boxed{n_F = 2^h} \quad \text{si } p_R = 0$$

Encadrement de la hauteur d'un arbre inconnu :

$$\boxed{\lfloor \log_2(n) \rfloor \leq h \leq n-1}$$

VI –Démonstration

Démontrons $\mathbf{n = 2^h - 1}$ pour le cas parfait et $p_R = 1$

Comment ? Par récurrence.

Posons comme propriété P_k :

Si l'arbre est de hauteur **k** alors $\mathbf{n = 2^k - 1}$

Initialisation (1) P_O ou P_1

Hérédité (2) $P_k \rightarrow P_{k+1}$

Conclusion (1) + (2) : la formule est vraie pour tout k.
Donc elle est valide.

Propriété P_k :

Si l'arbre parfait est de hauteur k alors $\mathbf{n = 2^k - 1}$

Si $p_R = 1$

<u>Initialisation</u> (1) P_1

k = 1 alors n = $\mathbf{2^1 - 1 = 1}$

(1) vérifiée : on a bien un seul nœud dans un arbre parfait de hauteur 1.

Propriété P_k :

Si l'arbre parfait est de hauteur k alors $\mathbf{n = 2^k - 1}$

Si $p_R = 1$

<u>Hérédité</u> (2) $P_k \rightarrow P_{k+1}$

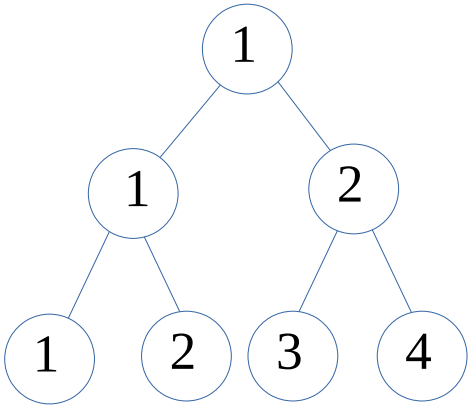
On fait l'hypothèse que P_k est valide et on doit montrer qu'en rajoutant une étape, P_{k+1} sera valide.

P_k supposée valide :

→ on a un arbre de hauteur **k**

→ son nombre de nœuds vaut $\mathbf{n = 2^k - 1}$

Nous savons que l'étage le plus profond contient $\mathbf{2^{k-1}}$ feuilles.



Prof. 1 2^0

Prof. 2 2^1

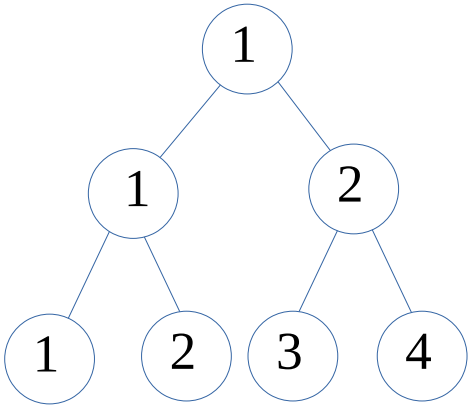
Prof. 3 2^2

On a donc une hauteur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{n = 2^k - 1}$

$$\mathbf{n_F = 2^{k-1}}$$

Rajoutons l'étage $\mathbf{k+1}$ de façon à obtenir une hauteur de $\mathbf{k+1}$

n devient $n = \ldots$



Prof. 1 2^0

Prof. 2 2^1

Prof. 3 2^2

On a donc une hauteur **k** et $n = 2^k - 1$

$n_F = 2^{k-1}$

Rajoutons l'étage **k+1** de façon à obtenir une hauteur de **k+1**

n devient $n = 2^k - 1 + 2 * 2^{k-1}$

(avant) **(on remplit le nouvel étage)**

n devient $n = 2^k - 1 + 2 * 2^{k-1}$

(avant) (on remplit le nouvel étage)

$$n = 2^k - 1 + 2^k$$

n devient $n = 2^k - 1 + 2 * 2^{k-1}$

(avant) (on remplit le nouvel étage)

$$n = 2^k - 1 + 2^k$$

$$n = 2*2^k - 1$$

n devient $n = \underbrace{2^k - 1}_{\text{(avant)}} + \underbrace{2 * 2^{k-1}}_{\text{(on remplit le nouvel étage)}}$

$$n = 2^k - 1 + 2^k$$

$$n = 2 * 2^k - 1$$

$$n = 2^{k+1} - 1$$

On constate donc :

k étages → $n = 2^k - 1$ (P_k)

k+1 étages → $n = 2^{k+1} - 1$ (P_{k+1})

On peut donc écrire que (2) $P_k \rightarrow P_{k+1}$

<u>Conclusion</u> (1) et (2) : Pk est valide.

On peut donc bien écrire

$\mathbf{n = 2^k - 1}$ **s**i $p_R = 1$ et que l'arbre est parfait