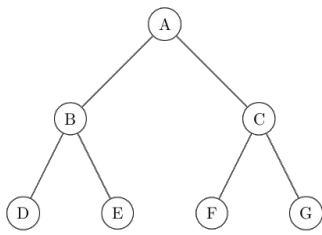
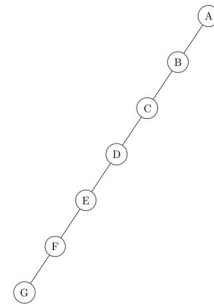


Algo 18 - Recherche dans les Arbres Binaires (AB)



Arbre Binaire Parfait



Arbre Binaire Filiforme

I - Fonctions réciproques

$$\log_2(2^x) = x$$

$$2^{\log_2(x)} = x$$

$$\begin{aligned} \log_2(2) &= 1, \\ \log_2(4) &= 2, \\ \log_2(8) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2(16) &= 4, \\ \log_2(32) &= 5, \\ \dots & \end{aligned}$$

II - Caractéristiques d'un Arbre Binaire Parfait et Filiforme

Pour un AB parfait :

**La hauteur h est liée au logarithme 2 de la taille n .
La taille n est liée à l'exponentielle 2 de la hauteur h .**

Avec convention $P_R = 1$

$$h = \log_2(n+1) \quad (\text{Formule 1})$$

$$n = 2^h - 1 \quad (\text{Formule 2})$$

Avec convention $P_R = 0$

$$h = \log_2(n+1) - 1 \quad \text{ou} \quad h = \lfloor \log_2(n) \rfloor$$

$$n = 2^{h+1} - 1$$

Lorsqu'on passe à la convention $P_R = 0$ la hauteur de l'arbre diminue de 1 par rapport à $P_R = 1$.

03° Montrer qu'on peut passer de la formule (1) à la formule (2).

04° Quelle est la taille d'un Arbre Binaire Parfait de hauteur 11 (on prendra la racine à 1) ?

05° Un Arbre Binaire de 500 noeuds peut-il être parfait ?

Pour un AB filiforme :

La hauteur h est liée linéairement à la taille n .

$$h = n \quad (P_R = 1)$$

$$h = n - 1 \quad (P_R = 0)$$

III - Caractéristiques d'un Arbre Binaire Quelconque

Avec convention $P_R = 1$

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil \leq h \leq n$$

$$h \leq n \leq 2^h - 1$$

Avec convention $P_R = 0$

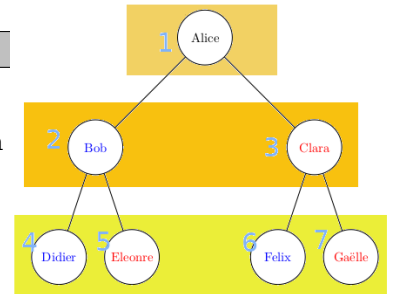
$$\begin{aligned} \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 &\leq h &\leq n - 1 \\ \lfloor \log_2(n) \rfloor &\leq h &\leq n - 1 \end{aligned}$$

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

06° Encadrer la hauteur d'un Arbre Binaire possédant 60 noeuds.

07° Encadrer la taille d'un Arbre Binaire possédant une hauteur de 5 (convention $P_R = 1$)

IV - Exploration sachant où aller



08° Si on ne sait pas où chercher exactement, quel est le coût en fonction de n (dans le pire des cas) d'un algorithme qui doit trouver un noeud (en fonction de la taille n de l'arbre) ?

09° Si on sait où cibler la recherche, en combien d'étapes parvient-on à atteindre le noeud du père de la mère d'Alice ? Combien de choix de destination à faire dans le pire des cas si on a un Arbre de hauteur 12 ? Quel est le coût d'une recherche ciblée en fonction de la hauteur h d'un Arbre Binaire quelconque ?

10° Si on sait où cibler cette recherche, dans le pire des cas, quel est le coût (par rapport à la hauteur h) d'une recherche ciblée : dans un Arbre Binaire Filiforme ? dans un Arbre Binaire quelconque ?

Conclusion

Dans le pire des cas, si on recherche un noeud **sans savoir où chercher**,

La recherche est à **coût linéaire par rapport à taille n** de l'arbre : $O(n)$

Dans le pire des cas, si on recherche un noeud **en ciblant cette recherche**,

La recherche est à **coût linéaire par rapport à la hauteur h** de l'arbre : $O(h)$

Arbre Binaire Parfait : $h = \log_2(n+1)$ Donc la recherche ciblée est en $O(\log_2(n))$

Arbre Binaire Filiforme : $h = n$ Donc la recherche ciblée est en $O(n)$

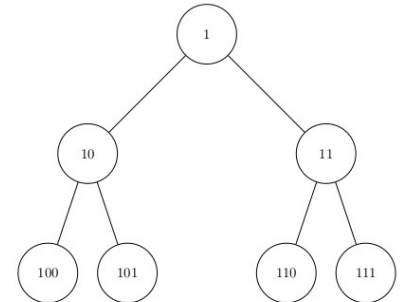
Arbre Binaire quelconque La recherche ciblée est en ... $O(n)$

V - Système de localisation des Noeuds

On attribue le nombre **1** à la Racine de l'AB.

Le noeud-racine du sous-arbre gauche porte ce numéro suivi d'un 0 : si la racine est 1 alors le noeud-fils-gauche est 10 .

Le Noeud-racine du sous-arbre droite porte ce numéro suivi d'un 1 : si la racine est 1 alors le noeud-fils-droite est 11 .



11° En utilisant cette notation, combien peut-on avoir de noeuds dans un AB de hauteur 2 ($P_R = 0$ par ex.) ?

12° Combien peut-on avoir de noeuds dans un AB de hauteur 7 ?

13° Sur l'arbre proposé, rajouter les deux prochains noeuds en utilisant le système de numérotation.

14° Avec ce système, comment trouver facilement les numéros des deux fils du noeud **14** ₁₀ ou **1110** ₂ ?

15° Avec ce système binaire, par quel numéro est identifié le père du père du noeud 65 ?

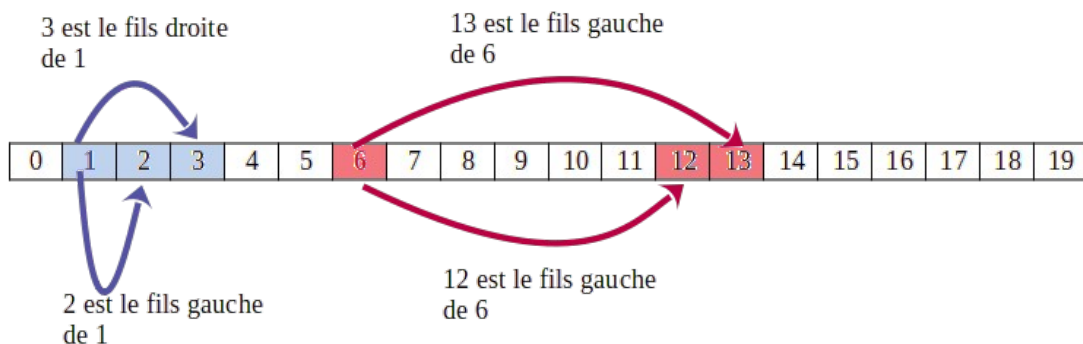
Implémentation d'un Arbre dans un tableau

La **Racine** possède l'indice **1**.

Le **fils-gauche** d'un noeud i possède l'indice $2*i$.

Le **fils-droite** d'un noeud i possède l'indice $2*i+1$.

Le **père** d'un noeud i possède l'indice $i // 2$.



- 16° Avec ce système décimal, par quel numéro est identifié le père du père du noeud 40 ?
- 17° Par quel numéro est identifié le fils-droite du fils-gauche du noeud d'indice 5 ?
- 18° Par quel numéro est identifié le fils-gauche du fils-droite du noeud numéroté 5 ?
- 19° Fournir l'implémentation de cet Arbre Binaire sous forme d'un tableau.
- 20° Quel est l'indice de la case qui stockera le fils-droite du noeud D

